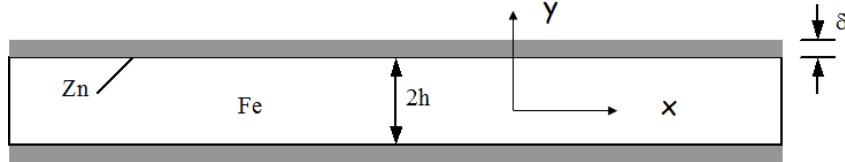


Corrigés chap. 10 PLASTICITE

Exercice 10.2 Contraintes dans une plaque galvanisée

On recouvre une plaque d'acier d'un film de Zn (zingage ou galvanisation) pour le protéger de l'oxydation, comme illustré sur la figure ci-dessous. La déposition est effectuée à la température de fusion du Zn, T_z . On souhaite calculer les contraintes d'origine thermique dans le Zn et le Fe induites par le refroidissement de la température T_z à la température ambiante T_a . Les coefficients d'expansion thermique sont α_{Zn} et α_{Fe} .



1. Ecrire l'expression de la déformation pour chacun des matériaux, en supposant que toute la déformation est thermo-élastique.

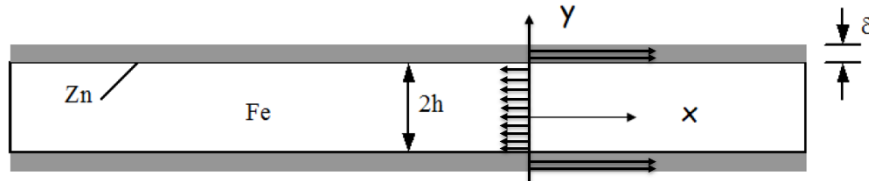
pour Zn: $\varepsilon = \varepsilon_{th} + \varepsilon_{el} = \alpha_{zn}(T_a - T_z) + \varepsilon_{el}$

pour acier: $\varepsilon = \varepsilon_{th} + \varepsilon_{el} = \alpha_{fe}(T_a - T_z) + \varepsilon_{el}$

2. La plaque étant supposée de dimensions infinies selon x et z, elle reste plane lors du refroidissement. Traduire alors cette condition sur la distribution de contrainte $\sigma_{xx}(y)$.
il faut que la somme des forces selon x soit nulle i.e en notant L_z la dimension selon z:

$$\int_{-h-\delta}^{h+\delta} dF(y) = \int_{-h-\delta}^{h+\delta} \sigma_{xx}(y) L_z dy = 0 \quad \text{soit} \quad \int_{-h-\delta}^{h+\delta} \sigma_{xx}(y) dy = 0$$

sinon un voilement de la plaque apparaîtra.



3. Que devient cette relation si les contraintes sont supposées uniformes dans chacun des deux matériaux ? On notera ces contraintes σ_{Zn} et σ_{Fe} .

on a alors $\int_{-h-\delta}^{h+\delta} \sigma_{xx}(y) dy = 2\delta\sigma_{zn} + 2h\sigma_{fe} = 0$ i.e. $\sigma_{fe} = -\frac{\delta}{h}\sigma_{zn}$

4. Utiliser le fait que l'adhésion du Zn sur l'acier est supposée parfaite pour calculer σ_{Zn} et σ_{Fe} .

il y a alors égalité des déformations dans le zinc et l'acier: $\varepsilon_{Zn} = \varepsilon_{Fe}$

$$\alpha_{zn}(T_a - T_z) + \frac{\sigma_{zn}}{E_{zn}} = \alpha_{fe}(T_a - T_z) + \frac{\sigma_{fe}}{E_{fe}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{fe} = -\frac{\delta}{h}\sigma_{zn}$$

il vient: $\left(\frac{1}{E_{zn}} + \frac{\delta}{hE_{fe}} \right) \sigma_{zn} = (\alpha_{fe} - \alpha_{zn})(T_a - T_z) = (\alpha_{zn} - \alpha_{fe})(T_z - T_a)$

ou encore $\sigma_{zn} = E_{eq} \Delta \alpha \Delta T \geq 0$. et $\sigma_{fe} = -\frac{\delta}{h}\sigma_{zn} \leq 0$.

5. Des valeurs typiques pour ce procédé sont: $\delta = 25 \mu m$, $\alpha_{Zn} = 35E-6 K^{-1}$, $T_{Zn} = 425^\circ C$, $E_{Zn} = 90 GPa$, $h = 500 \mu m$, $\alpha_{Fe} = 12E-6 K^{-1}$, $T_a = 25^\circ C$ et $E_{Fe} = 200 GPa$. Calculer σ_{Zn} ,

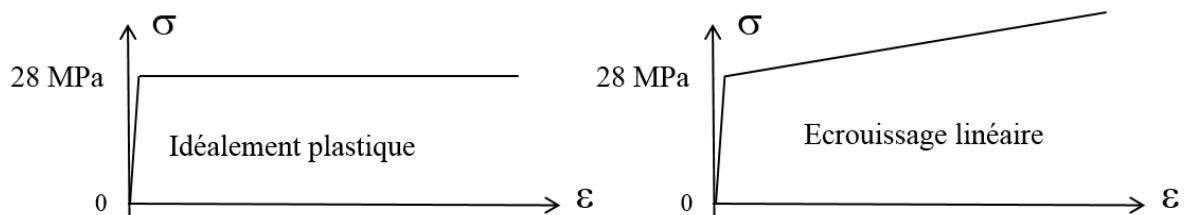
comparer cette valeur à la limite plastique du Zn, $\sigma_y = 28 \text{ MPa}$ et montrer qu'il y a plastification du Zn. Qu'en est-il de l'acier ?

$$\text{AN: } \left(\frac{1}{E_{\text{Zn}}} + \frac{\delta}{h E_{\text{Fe}}} \right) = \left(\frac{1}{E_{\text{Zn}}} + \frac{1}{20 E_{\text{Fe}}} \right) \approx \frac{1}{E_{\text{Zn}}} \text{ et } \sigma_{\text{Zn}} = E_{\text{Zn}} \Delta \alpha \Delta T = 90.10^3 \cdot 23.10^{-6} \cdot 400 = 36 \times 23 = 828 \text{ MPa}$$

$$\text{et } \sigma_{\text{Fe}} = -\frac{\delta}{h} \sigma_{\text{Zn}} = -828 / 20 = -41.4 \text{ MPa}$$

La limite élastique du Zn est dépassée : il y aura une composante plastique dans la déformation du Zn (mais pas dans celle de l'acier) et la contrainte dans le Zinc sera de 28 MPa.

6. Calculer la déformation plastique dans le Zn. On commencera par décomposer les déformations $\varepsilon_{\text{Zn}}^{\text{total}} = \varepsilon_{\text{Zn}}^{\text{el}} + \varepsilon_{\text{Zn}}^{\text{pl}} + \varepsilon_{\text{Zn}}^{\text{th}}$ et on traitera le Zn comme un matériau élastique et parfaitement plastique, afin de trouver $\varepsilon_{\text{Zn}}^{\text{pl}}$.



$$\text{pour Zn: } \varepsilon = \varepsilon_{\text{th}} + \varepsilon_{\text{el}} + \varepsilon_{\text{pl}} = \alpha_{\text{zn}} (T_a - T_z) + \varepsilon_{\text{el}} + \varepsilon_{\text{pl}}$$

$$\text{pour acier: } \varepsilon = \varepsilon_{\text{th}} + \varepsilon_{\text{el}} = \alpha_{\text{fe}} (T_a - T_z) + \varepsilon_{\text{el}}$$

$$\text{l'égalité des déformations dans le zinc et l'acier: } \varepsilon_{\text{Zn}} = \varepsilon_{\text{Fe}}$$

$$\alpha_{\text{zn}} (T_a - T_z) + \frac{\sigma_0}{E_{\text{Zn}}} + \varepsilon_{\text{pl}} = \alpha_{\text{fe}} (T_a - T_z) + \frac{\sigma_{\text{Fe}}}{E_{\text{Fe}}} \text{ avec } \sigma_{\text{Fe}} = -\frac{\delta}{h} \sigma_0$$

$$\text{il vient: } \left(\frac{1}{E_{\text{Zn}}} + \frac{\delta}{h E_{\text{Fe}}} \right) \sigma_0 \approx \left(\frac{1}{E_{\text{Zn}}} \right) \sigma_0 = (\alpha_{\text{fe}} - \alpha_{\text{zn}}) (T_a - T_z) - \varepsilon_{\text{pl}} = (\alpha_{\text{zn}} - \alpha_{\text{fe}}) (T_z - T_a) - \varepsilon_{\text{pl}}$$

$$\text{ou encore } \varepsilon_{\text{pl}} = \Delta \alpha \Delta T - \frac{\sigma_0}{E_{\text{Zn}}} = 23.10^{-6} \cdot 400 - \frac{28}{90} 10^{-3} = (9.2 - 0.31) 10^{-3} = 0.889\%$$

Dans la décomposition des déformations, c'est la composante plastique qui est la plus élevée.

7. Calculer la déformation plastique dans le Zn dans le cas d'un écrouissage linéaire de pente $H = 1 \text{ GPa}$.

$$\text{égalité des déformations dans le zinc et l'acier: } \varepsilon_{\text{Zn}} = \varepsilon_{\text{Fe}}$$

$$\alpha_{\text{zn}} (T_a - T_z) + \frac{\sigma}{E_{\text{Zn}}} + \varepsilon_{\text{pl}} = \alpha_{\text{fe}} (T_a - T_z) + \frac{\sigma_{\text{Fe}}}{E_{\text{Fe}}} \text{ avec } \sigma_{\text{Fe}} = -\frac{\delta}{h} \sigma_{\text{zn}} \text{ et } \varepsilon_{\text{pl}} = \frac{\sigma_{\text{zn}} - \sigma_0}{H}$$

ainsi on peut calculer σ_{zn} que l'on note σ

on peut aussi négliger les déf. élastiques ... et noter que les déf. thermiques $\Delta \alpha \Delta T$ se transforment en déf. plastique dans le Zinc:

$$\varepsilon_{\text{pl}} = \Delta \alpha \Delta T = 23.10^{-6} \cdot 400 = 0.92\% = \varepsilon_{\text{pl}} = \frac{\sigma - \sigma_0}{H}$$

$$\sigma = \sigma_0 + H \varepsilon_{\text{pl}} = 28 + 1000 \cdot 9.210^{-3} = 28 + 9.2 = 37.2 \text{ MPa.}$$

$$\text{et } \sigma_{\text{Fe}} = -\frac{\delta}{h} \sigma = -\frac{1}{20} 37.2 \text{ MPa} = -1.86 \text{ MPa.}$$

Exercice 10.3

On considère le tenseur de contraintes suivant :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

et le critère de plasticité de Von Mises

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2} - \sigma_0$$

Démontrer alors la relation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_{Dij}}{\sigma_{eq}}$$

Où σ_D est le tenseur déviateur des contraintes.

On remarque que le tenseur des contraintes est exprimé dans son repère principal (ou propre) et qu'il est donc diagonal. Calculons tout d'abord le tenseur déviateur des contraintes noté $S = \sigma_D$:

$$S = \sigma + pI = \sigma - \frac{1}{3} \text{Tr} \sigma I \text{ est diagonal et } S_I = \sigma_I - \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \frac{1}{3}(2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III})$$

et idem pour les autres composantes diagonales de S .

le tenseur dérivée a pour composantes $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$

$$\text{Calculons la première composante } \frac{\partial f}{\partial \sigma_I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2(\sigma_I - \sigma_{II}) + 2(\sigma_I - \sigma_{III})}{2\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III}}{\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3S_I}{\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_I} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{eq}} S_I = \frac{3}{2} \frac{S_I}{\sigma_{eq}} \text{ et idem pour les autres composantes.}$$

$$\text{Ainsi } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{S}{\sigma_{eq}}$$

Exercice 10.4 Ecrasement axisymétrique

On considère la déformation par compression entre deux plans parallèles d'un lopin de métal rond de rayon initial R et de hauteur $2h$. Après écrasement, le lopin présente une hauteur $2h'$ et un rayon maximum R' . Par symétrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques où la déformation est indépendante de l'angle θ . La figure ci-dessous présente la situation pour un quart de ce lopin dans une coupe à angle θ constant. Lors de l'écrasement, un point M de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) se déplace en $M'(\rho', \theta, z')$ donné par les équations :

$$\rho' = \rho \left[1 + \varepsilon_R \frac{z}{h} \left(2 - \frac{z}{h} \right) \right] \text{ et } z' = (1 + \varepsilon_h) z \text{ avec } \varepsilon_R = \frac{R' - R}{R} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h = \frac{h' - h}{h} \leq 0$$

Calculez le champ de déplacement $\mathbf{u}$.

$\vec{u} = \rho \left[\varepsilon_R \frac{z}{h} \left(2 - \frac{z}{h} \right) \right] \vec{e}_r + \varepsilon_h z \vec{e}_z$ et le rayon maximum est obtenu en $z = h$ et vaut $R(1 + \varepsilon_R)$.

Calculez directement le tenseur linéarisé des petites déformations ε en utilisant le tenseur gradient d'un vecteur v en coordonnées cylindriques.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\rho}{\partial z} \\ 0 & \frac{u_\rho}{\rho} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_\rho}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{z}{h} \left(2 - \frac{z}{h} \right) & 0 & \varepsilon_R \frac{\rho}{h} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \\ 0 & \varepsilon_R \frac{z}{h} \left(2 - \frac{z}{h} \right) & 0 \\ \varepsilon_R \frac{\rho}{h} \left(1 - \frac{z}{h} \right) & 0 & \varepsilon_h \end{pmatrix}$$

Le matériau constitutif du lopin a un comportement élastique isotrope de coefficients de Lamé μ et λ . Calculez le tenseur des contraintes associées aux petites déformations déterminées précédemment.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{RR} & 0 & \varepsilon_{RZ} \\ 0 & \varepsilon_{RR} & 0 \\ \varepsilon_{RZ} & 0 & \varepsilon_h \end{pmatrix} \text{ et } \text{tr} \varepsilon = 2\varepsilon_{RR} + \varepsilon_h \text{ et } \sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr} \varepsilon I$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2\mu\varepsilon_{RR} + \lambda(2\varepsilon_{RR} + \varepsilon_h) & 0 & 2\mu\varepsilon_{RZ} \\ 0 & 2\mu\varepsilon_{RR} + \lambda(2\varepsilon_{RR} + \varepsilon_h) & 0 \\ 2\mu\varepsilon_{RZ} & 0 & 2\mu\varepsilon_h + \lambda(2\varepsilon_{RR} + \varepsilon_h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{RR} & 0 & \sigma_{RZ} \\ 0 & \sigma_{RR} & 0 \\ \sigma_{RZ} & 0 & \sigma_{ZZ} \end{pmatrix}$$

Quelle est la densité de force t sur la paroi en $z=0$?

La densité de force t sur la paroi en $z=0$ vaut :

$$\vec{t} = \sigma_{(z=0)} (-\vec{e}_z) = \begin{pmatrix} \sigma_{RR} & 0 & \sigma_{RZ} \\ 0 & \sigma_{RR} & 0 \\ \sigma_{RZ} & 0 & \sigma_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu\varepsilon_R \frac{\rho}{h} \\ 0 \\ -(2\mu + \lambda)\varepsilon_h \end{pmatrix} \text{ car } \varepsilon_{RR} = 0 \text{ en } z=0$$

En déduire la force de réaction du support sur lequel est posé le lopin lors de l'écrasement. On notera R cette force.

$$\vec{R} = \left(\int_0^R 2\mu\varepsilon_R \frac{\rho}{h} \rho d\rho \right) \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\theta + 2\pi \left(\int_0^R (2\mu + \lambda)\varepsilon_h \rho d\rho \right) \vec{e}_z = \pi(2\mu + \lambda)\varepsilon_h R^2 \vec{e}_z$$

La réaction globale du support est selon l'axe vertical : elle « résiste » à l'écrasement du lopin.

On note σ_0 la limite élastique du lopin et on utilise le critère de plasticité de Von Mises :

$$f = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{yz}^2 + 6\sigma_{zx}^2 - 2\sigma_0^2$$

Ce critère est valable dans tout repère orthonormé, donc aussi dans le repère (ρ, θ, z) .

Montrer que dans notre cas, le critère s'écrit : $f = 2(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{\rho z}^2 - 2\sigma_0^2$.

Dans notre cas, vue la forme de σ , le critère s'écrit : $f = 2(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{\rho z}^2 - 2\sigma_0^2$.

Appliquez ce critère sur la surface $z = 0$ puis déterminez le premier point à plastifier.

Surfaces $z = 0$ et $z = h$:

$$f = 8\mu^2 \left(\varepsilon_R \frac{z}{h} \left(2 - \frac{z}{h} \right) - \varepsilon_h \right)^2 + 24\mu^2 \varepsilon_R^2 \left(\frac{\rho}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 - 2\sigma_0^2 = 0$$

$$f_{(z=0)} = 8\mu^2 (\varepsilon_h)^2 + 24\mu^2 \varepsilon_R^2 \left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \text{ et } f_{(z=h)} = 8\mu^2 (\varepsilon_R - \varepsilon_h)^2 - 2\sigma_0^2 = 0$$

En $z = 0$, la plasticité va commencer en $\rho = R$, i.e. au bord du lopin.

En $z = h$, la plasticité va commencer dans toute la section lorsque les déformations ε_R et ε_h deviennent suffisamment différentes :

$$8\mu^2 (\varepsilon_R - \varepsilon_h)^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \text{ soit } (\varepsilon_R - \varepsilon_h)^2 = \sigma_0^2 / 4\mu^2 \text{ soit } |\varepsilon_R - \varepsilon_h| = \sigma_0 / 2\mu$$